Corrigé de l'exercice 1

1) Algorithme d'Euclide.

On effectue les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{aligned} 44 &= 1 \times 26 + 18 \\ 26 &= 1 \times 18 + 8 \\ 18 &= 2 \times 8 + 2 \\ 8 &= 4 \times 2 + 0 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\gcd(44, 26) = 2$$

2) Théorème de Bezout.

En remontant les egalites de l'algorithme d'Euclide, on peut exprimer le PGCD comme une combinaison lineaire de 44 et de 26.
D'apres le theoreme de Bezout, il existe donc des entiers u et v tels que :

$$44 \times (+3) + 26 \times (-5) = 2$$

Ainsi, un couple de coefficients de Bezout est :

$$(u, v) = (3, -5)$$

3) Equation diophantienne.

On considere l'equation :

$$44x + 26y = 2$$

Comme $2 = \gcd(44, 26)$, cette equation admet des solutions entieres. Une solution particuliere est :

$$(x_0, y_0) = (3, -5)$$

La solution generale est :

$$x = 3 + 13t, \quad y = -5 - 22t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

4) Application du corollaire de Gauss.

$$44 \mid 26n \Longrightarrow 22 \mid n \qquad \text{avec } d = \gcd(44, 26) = 2$$

Par definition de la divisibilite, il existe un entier k tel que :

$$44 \mid 26n \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 26n = 44k$$

On conclut :

$$22 \mid n \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z},\ n = 22m$$

Donc $22 \mid n$.

Corrigé de l'exercice 2

1) Algorithme d'Euclide.

On effectue les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{aligned} 66 &= 2 \times 28 + 10 \\ 28 &= 2 \times 10 + 8 \\ 10 &= 1 \times 8 + 2 \\ 8 &= 4 \times 2 + 0 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\gcd(66, 28) = 2$$

2) Théorème de Bezout.

En remontant les egalites de l'algorithme d'Euclide, on peut exprimer le PGCD comme une combinaison lineaire de 66 et de 28.
D'apres le theoreme de Bezout, il existe donc des entiers u et v tels que :

$$66 \times (+3) + 28 \times (-7) = 2$$

Ainsi, un couple de coefficients de Bezout est :

$$(u, v) = (3, -7)$$

3) Equation diophantienne.

On considere l'equation :

$$66x + 28y = 2$$

Comme $2 = \gcd(66, 28)$, cette equation admet des solutions entieres. Une solution particuliere est :

$$(x_0, y_0) = (3, -7)$$

La solution generale est :

$$x = 3 + 14t, \quad y = -7 - 33t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

4) Application du corollaire de Gauss.

$$66 \mid 28n \Longrightarrow 33 \mid n \qquad \text{avec } d = \gcd(66, 28) = 2$$

Par definition de la divisibilite, il existe un entier k tel que :

$$66 \mid 28n \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 28n = 66k$$

On conclut :

$$33 \mid n \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z},\ n = 33m$$

Donc $33 \mid n$.

Corrigé de l'exercice 3

1) Algorithme d'Euclide.

On effectue les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{aligned}
78 &= 1 \times 48 + 30 \\
48 &= 1 \times 30 + 18 \\
30 &= 1 \times 18 + 12 \\
18 &= 1 \times 12 + \ \ 6 \\
12 &= \ \ 2 \times 6 + \ \ 0
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\gcd(78, 48) = 6$$

2) Théorème de Bezout.

En remontant les egalites de l'algorithme d'Euclide, on peut exprimer le PGCD comme une combinaison lineaire de 78 et de 48.
D'apres le theoreme de Bezout, il existe donc des entiers u et v tels que :

$$78 \times (-3) + 48 \times (+5) = 6$$

Ainsi, un couple de coefficients de Bezout est :

$$(u, v) = (-3, 5)$$

3) Equation diophantienne.

On considere l'equation :

$$78x + 48y = 6$$

Comme $6 = \gcd(78, 48)$, cette equation admet des solutions entieres. Une solution particuliere est :

$$(x_0, y_0) = (-3, 5)$$

La solution generale est :

$$x = -3 + 8t, \quad y = 5 - 13t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

4) Application du corollaire de Gauss.

$$78 \mid 48n \Longrightarrow 13 \mid n \qquad \text{avec } d = \gcd(78, 48) = 6$$

Par definition de la divisibilite, il existe un entier k tel que :

$$78 \mid 48n \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 48n = 78k$$

On conclut :

$$13 \mid n \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z},\ n = 13m$$

Donc $13 \mid n$.