Corrigé de l'exercice 1

1) Algorithme d'Euclide.

On effectue les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{aligned} 85 &= 1 \times 50 + 35 \\ 50 &= 1 \times 35 + 15 \\ 35 &= 2 \times 15 + \ \ 5 \\ 15 &= \ \ 3 \times 5 + \ \ 0 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\gcd(85, 50) = 5$$

2) Théorème de Bezout.

En remontant les egalites de l'algorithme d'Euclide, on peut exprimer le PGCD comme une combinaison lineaire de 85 et de 50.
D'apres le theoreme de Bezout, il existe donc des entiers u et v tels que :

$$85 \times (+3) + 50 \times (-5) = 5$$

Ainsi, un couple de coefficients de Bezout est :

$$(u, v) = (3, -5)$$

3) Equation diophantienne.

On considere l'equation :

$$85x + 50y = 5$$

Comme $5 = \gcd(85, 50)$, cette equation admet des solutions entieres. Une solution particuliere est :

$$(x_0, y_0) = (3, -5)$$

La solution generale est :

$$x = 3 + 10t, \quad y = -5 - 17t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

4) Application du corollaire de Gauss.

$$85 \mid 50n \Longrightarrow 17 \mid n \qquad \text{avec } d = \gcd(85, 50) = 5$$

Par definition de la divisibilite, il existe un entier k tel que :

$$85 \mid 50n \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 50n = 85k$$

On conclut :

$$17 \mid n \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z},\ n = 17m$$

Donc $17 \mid n$.

Corrigé de l'exercice 2

1) Algorithme d'Euclide.

On effectue les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{aligned}
77 &= 1 \times 49 + 28 \\
49 &= 1 \times 28 + 21 \\
28 &= 1 \times 21 + \ \ 7 \\
21 &= \ \ 3 \times 7 + \ \ 0
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\gcd(77, 49) = 7$$

2) Théorème de Bezout.

En remontant les egalites de l'algorithme d'Euclide, on peut exprimer le PGCD comme une combinaison lineaire de 77 et de 49.
D'apres le theoreme de Bezout, il existe donc des entiers u et v tels que :

$$77 \times (+2) + 49 \times (-3) = 7$$

Ainsi, un couple de coefficients de Bezout est :

$$(u, v) = (2, -3)$$

3) Equation diophantienne.

On considere l'equation :

$$77x + 49y = 7$$

Comme $7 = \gcd(77, 49)$, cette equation admet des solutions entieres. Une solution particuliere est :

$$(x_0, y_0) = (2, -3)$$

La solution generale est :

$$x = 2 + 7t, \quad y = -3 - 11t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

4) Application du corollaire de Gauss.

$$77 \mid 49n \Longrightarrow 11 \mid n \qquad \text{avec } d = \gcd(77, 49) = 7$$

Par definition de la divisibilite, il existe un entier k tel que :

$$77 \mid 49n \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 49n = 77k$$

On conclut :

$$11 \mid n \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z},\ n = 11m$$

Donc $11 \mid n$.

Corrigé de l'exercice 3

1) Algorithme d'Euclide.

On effectue les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{aligned} 34 &= 2 \times 14 + 6 \\ 14 &= \ \ 2 \times 6 + 2 \\ 6 &= \ \ 3 \times 2 + 0 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\gcd(34, 14) = 2$$

2) Théorème de Bezout.

En remontant les egalites de l'algorithme d'Euclide, on peut exprimer le PGCD comme une combinaison lineaire de 34 et de 14.
D'apres le theoreme de Bezout, il existe donc des entiers u et v tels que :

$$34 \times (-2) + 14 \times (+5) = 2$$

Ainsi, un couple de coefficients de Bezout est :

$$(u, v) = (-2, 5)$$

3) Equation diophantienne.

On considere l'equation :

$$34x + 14y = 2$$

Comme $2 = \gcd(34, 14)$, cette equation admet des solutions entieres. Une solution particuliere est :

$$(x_0, y_0) = (-2, 5)$$

La solution generale est :

$$x = -2 + 7t, \quad y = 5 - 17t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

4) Application du corollaire de Gauss.

$$34 \mid 14n \Longrightarrow 17 \mid n \qquad \text{avec } d = \gcd(34, 14) = 2$$

Par definition de la divisibilite, il existe un entier k tel que :

$$34 \mid 14n \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 14n = 34k$$

On conclut :

$$17 \mid n \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z},\ n = 17m$$

Donc $17 \mid n$.