Corrigé de l'exercice 1

1) Algorithme d'Euclide.

On effectue les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{aligned} 93 &= 2 \times 36 + 21 \\ 36 &= 1 \times 21 + 15 \\ 21 &= 1 \times 15 + 6 \\ 15 &= 2 \times 6 + 3 \\ 6 &= 2 \times 3 + 0 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\gcd(93, 36) = 3$$

2) Théorème de Bezout.

En remontant les egalites de l'algorithme d'Euclide, on peut exprimer le PGCD comme une combinaison lineaire de 93 et de 36.
D'apres le theoreme de Bezout, il existe donc des entiers u et v tels que :

$$93 \times (-5) + 36 \times (+13) = 3$$

Ainsi, un couple de coefficients de Bezout est :

$$(u, v) = (-5, 13)$$

3) Equation diophantienne.

On considere l'equation :

$$93x + 36y = 3$$

Comme $3 = \gcd(93, 36)$, cette equation admet des solutions entieres. Une solution particuliere est :

$$(x_0, y_0) = (-5, 13)$$

La solution generale est :

$$x = -5 + 12t, \quad y = 13 - 31t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

4) Application du corollaire de Gauss.

$$93 \mid 36n \Longrightarrow 31 \mid n \qquad \text{avec } d = \gcd(93, 36) = 3$$

Par definition de la divisibilite, il existe un entier k tel que :

$$93 \mid 36n \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 36n = 93k$$

On conclut :

$$31 \mid n \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z},\ n = 31m$$

Donc $31 \mid n$.

Corrigé de l'exercice 2

1) Algorithme d'Euclide.

On effectue les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{aligned} 36 &= 1 \times 20 + 16 \\ 20 &= 1 \times 16 + 4 \\ 16 &= 4 \times 4 + 0 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\gcd(36, 20) = 4$$

2) Théorème de Bezout.

En remontant les egalites de l'algorithme d'Euclide, on peut exprimer le PGCD comme une combinaison lineaire de 36 et de 20.
D'apres le theoreme de Bezout, il existe donc des entiers u et v tels que :

$$36 \times (-1) + 20 \times (+2) = 4$$

Ainsi, un couple de coefficients de Bezout est :

$$(u, v) = (-1, 2)$$

3) Equation diophantienne.

On considere l'equation :

$$36x + 20y = 4$$

Comme $4 = \gcd(36, 20)$, cette equation admet des solutions entieres. Une solution particuliere est :

$$(x_0, y_0) = (-1, 2)$$

La solution generale est :

$$x = -1 + 5t, \quad y = 2 - 9t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

4) Application du corollaire de Gauss.

$$36 \mid 20n \Longrightarrow 9 \mid n \qquad \text{avec } d = \gcd(36, 20) = 4$$

Par definition de la divisibilite, il existe un entier k tel que :

$$36 \mid 20n \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 20n = 36k$$

On conclut :

$$9 \mid n \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z},\ n = 9m$$

Donc $9 \mid n$.

Corrigé de l'exercice 3

1) Algorithme d'Euclide.

On effectue les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{aligned} 186 &= 1 \times 108 + 78 \\ 108 &= \ \ 1 \times 78 + 30 \\ 78 &= \ \ 2 \times 30 + 18 \\ 30 &= \ \ 1 \times 18 + 12 \\ 18 &= \ \ 1 \times 12 + \ \ 6 \\ 12 &= \ \ \ \ 2 \times 6 + \ \ 0 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\gcd(186, 108) = 6$$

2) Théorème de Bezout.

En remontant les egalites de l'algorithme d'Euclide, on peut exprimer le PGCD comme une combinaison lineaire de 186 et de 108.
D'apres le theoreme de Bezout, il existe donc des entiers u et v tels que :

$$186 \times (+7) + 108 \times (-12) = 6$$

Ainsi, un couple de coefficients de Bezout est :

$$(u, v) = (7, -12)$$

3) Equation diophantienne.

On considere l'equation :

$$186x + 108y = 6$$

Comme $6 = \gcd(186, 108)$, cette equation admet des solutions entieres. Une solution particuliere est :

$$(x_0, y_0) = (7, -12)$$

La solution generale est :

$$x = 7 + 18t, \quad y = -12 - 31t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

4) Application du corollaire de Gauss.

$$186 \mid 108n \Longrightarrow 31 \mid n \qquad \text{avec } d = \gcd(186, 108) = 6$$

Par definition de la divisibilite, il existe un entier k tel que :

$$186 \mid 108n \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 108n = 186k$$

On conclut :

$$31 \mid n \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z},\ n = 31m$$

Donc $31 \mid n$.