Corrigé de l'exercice 1

1) Algorithme d'Euclide.

On effectue les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{aligned} 65 &= 1 \times 40 + 25 \\ 40 &= 1 \times 25 + 15 \\ 25 &= 1 \times 15 + 10 \\ 15 &= 1 \times 10 + \ \ 5 \\ 10 &= \ \ 2 \times 5 + \ \ 0 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\gcd(65, 40) = 5$$

2) Théorème de Bezout.

En remontant les egalites de l'algorithme d'Euclide, on peut exprimer le PGCD comme une combinaison lineaire de 65 et de 40.
D'apres le theoreme de Bezout, il existe donc des entiers u et v tels que :

$$65 \times (-3) + 40 \times (+5) = 5$$

Ainsi, un couple de coefficients de Bezout est :

$$(u, v) = (-3, 5)$$

3) Equation diophantienne.

On considere l'equation :

$$65x + 40y = 5$$

Comme $5 = \gcd(65, 40)$, cette equation admet des solutions entieres. Une solution particuliere est :

$$(x_0, y_0) = (-3, 5)$$

La solution generale est :

$$x = -3 + 8t, \quad y = 5 - 13t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

4) Application du corollaire de Gauss.

$$65 \mid 40n \Longrightarrow 13 \mid n \qquad \text{avec } d = \gcd(65, 40) = 5$$

Par definition de la divisibilite, il existe un entier k tel que :

$$65 \mid 40n \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 40n = 65k$$

On conclut :

$$13 \mid n \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z},\ n = 13m$$

Donc $13 \mid n$.

Corrigé de l'exercice 2

1) Algorithme d'Euclide.

On effectue les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{aligned}78 &= 1 \times 48 + 30\\ 48 &= 1 \times 30 + 18\\ 30 &= 1 \times 18 + 12\\ 18 &= 1 \times 12 + \ \ 6\\ 12 &= \ \ 2 \times 6 + \ \ 0\end{aligned}$$

On obtient :

$$\gcd(78, 48) = 6$$

2) Théorème de Bezout.

En remontant les egalites de l'algorithme d'Euclide, on peut exprimer le PGCD comme une combinaison lineaire de 78 et de 48.
D'apres le theoreme de Bezout, il existe donc des entiers u et v tels que :

$$78 \times (-3) + 48 \times (+5) = 6$$

Ainsi, un couple de coefficients de Bezout est :

$$(u, v) = (-3, 5)$$

3) Equation diophantienne.

On considere l'equation :

$$78x + 48y = 6$$

Comme $6 = \gcd(78, 48)$, cette equation admet des solutions entieres. Une solution particuliere est :

$$(x_0, y_0) = (-3, 5)$$

La solution generale est :

$$x = -3 + 8t, \quad y = 5 - 13t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

4) Application du corollaire de Gauss.

$$78 \mid 48n \Longrightarrow 13 \mid n \qquad \text{avec } d = \gcd(78, 48) = 6$$

Par definition de la divisibilite, il existe un entier k tel que :

$$78 \mid 48n \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 48n = 78k$$

On conclut :

$$13 \mid n \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z},\ n = 13m$$

Donc $13 \mid n$.

Corrigé de l'exercice 3

1) Algorithme d'Euclide.

On effectue les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{aligned}105 &= 1\times 65 + 40\\ 65 &= 1\times 40 + 25\\ 40 &= 1\times 25 + 15\\ 25 &= 1\times 15 + 10\\ 15 &= 1\times 10 + \ \ 5\\ 10 &= \ \ 2\times 5 + \ \ 0\end{aligned}$$

On obtient :

$$\gcd(105, 65) = 5$$

2) Théorème de Bezout.

En remontant les egalites de l'algorithme d'Euclide, on peut exprimer le PGCD comme une combinaison lineaire de 105 et de 65.
D'apres le theoreme de Bezout, il existe donc des entiers u et v tels que :

$$105 \times (+5) + 65 \times (-8) = 5$$

Ainsi, un couple de coefficients de Bezout est :

$$(u, v) = (5, -8)$$

3) Equation diophantienne.

On considere l'equation :

$$105x + 65y = 5$$

Comme $5 = \gcd(105, 65)$, cette equation admet des solutions entieres. Une solution particuliere est :

$$(x_0, y_0) = (5, -8)$$

La solution generale est :

$$x = 5 + 13t, \quad y = -8 - 21t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

4) Application du corollaire de Gauss.

$$105 \mid 65n \Longrightarrow 21 \mid n \qquad \text{avec } d = \gcd(105, 65) = 5$$

Par definition de la divisibilite, il existe un entier k tel que :

$$105 \mid 65n \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 65n = 105k$$

On conclut :

$$21 \mid n \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z},\ n = 21m$$

Donc $21 \mid n$.