Corrigé de l'exercice 1

1) Algorithme d'Euclide.

On effectue les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{aligned}92 &= 2\times 40+12\\ 40 &= 3\times 12+\ \ 4\\ 12 &= \ \ 3\times 4+\ \ 0\end{aligned}$$

On obtient :

$$\gcd(92,40)=4$$

2) Théorème de Bezout.

En remontant les egalites de l'algorithme d'Euclide, on peut exprimer le PGCD comme une combinaison lineaire de 92 et de 40.
D'apres le theoreme de Bezout, il existe donc des entiers u et v tels que :

$$92\times(-3)+40\times(+7)=4$$

Ainsi, un couple de coefficients de Bezout est :

$$(u,v)=(-3,7)$$

3) Equation diophantienne.

On considere l'equation :

$$92x+40y=4$$

Comme $4=\gcd(92,40)$, cette equation admet des solutions entieres. Une solution particuliere est :

$$(x_0,y_0)=(-3,7)$$

La solution generale est :

$$x=-3+10t,\quad y=7-23t,\quad t\in\mathbb{Z}$$

4) Application du corollaire de Gauss.

$$92\mid 40n\Longrightarrow 23\mid n\qquad \text{avec } d=\gcd(92,40)=4$$

Par definition de la divisibilite, il existe un entier k tel que :

$$92\mid 40n\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ 40n=92k$$

On conclut :

$$23\mid n\iff \exists m\in\mathbb{Z},\ n=23m$$

Donc $23\mid n$.

Corrigé de l'exercice 2

1) Algorithme d'Euclide.

On effectue les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{aligned} 60 &= 1 \times 34 + 26 \\ 34 &= 1 \times 26 + 8 \\ 26 &= 3 \times 8 + 2 \\ 8 &= 4 \times 2 + 0 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\gcd(60, 34) = 2$$

2) Théorème de Bezout.

En remontant les egalites de l'algorithme d'Euclide, on peut exprimer le PGCD comme une combinaison lineaire de 60 et de 34.
D'apres le theoreme de Bezout, il existe donc des entiers u et v tels que :

$$60 \times (+4) + 34 \times (-7) = 2$$

Ainsi, un couple de coefficients de Bezout est :

$$(u, v) = (4, -7)$$

3) Equation diophantienne.

On considere l'equation :

$$60x + 34y = 2$$

Comme $2 = \gcd(60, 34)$, cette equation admet des solutions entieres. Une solution particuliere est :

$$(x_0, y_0) = (4, -7)$$

La solution generale est :

$$x = 4 + 17t, \quad y = -7 - 30t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

4) Application du corollaire de Gauss.

$$60 \mid 34n \Longrightarrow 30 \mid n \qquad \text{avec } d = \gcd(60, 34) = 2$$

Par definition de la divisibilite, il existe un entier k tel que :

$$60 \mid 34n \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 34n = 60k$$

On conclut :

$$30 \mid n \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z},\ n = 30m$$

Donc $30 \mid n$.

Corrigé de l'exercice 3

1) Algorithme d'Euclide.

On effectue les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{aligned} 44 &= 1 \times 28 + 16 \\ 28 &= 1 \times 16 + 12 \\ 16 &= 1 \times 12 + \ \ 4 \\ 12 &= \ \ 3 \times 4 + \ \ 0 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\gcd(44, 28) = 4$$

2) Théorème de Bezout.

En remontant les egalites de l'algorithme d'Euclide, on peut exprimer le PGCD comme une combinaison lineaire de 44 et de 28.
D'apres le theoreme de Bezout, il existe donc des entiers u et v tels que :

$$44 \times (+2) + 28 \times (-3) = 4$$

Ainsi, un couple de coefficients de Bezout est :

$$(u, v) = (2, -3)$$

3) Equation diophantienne.

On considere l'equation :

$$44x + 28y = 4$$

Comme $4 = \gcd(44, 28)$, cette equation admet des solutions entieres. Une solution particuliere est :

$$(x_0, y_0) = (2, -3)$$

La solution generale est :

$$x = 2 + 7t, \quad y = -3 - 11t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

4) Application du corollaire de Gauss.

$$44 \mid 28n \Longrightarrow 11 \mid n \qquad \text{avec } d = \gcd(44, 28) = 4$$

Par definition de la divisibilite, il existe un entier k tel que :

$$44 \mid 28n \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 28n = 44k$$

On conclut :

$$11 \mid n \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z},\ n = 11m$$

Donc $11 \mid n$.