Corrigé de l'exercice 1

1) Algorithme d'Euclide.

On effectue les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{aligned} 186 &= 2 \times 72 + 42 \\ 72 &= 1 \times 42 + 30 \\ 42 &= 1 \times 30 + 12 \\ 30 &= 2 \times 12 + \ \ 6 \\ 12 &= \ \ 2 \times 6 + \ \ 0 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\gcd(186, 72) = 6$$

2) Théorème de Bezout.

En remontant les egalites de l'algorithme d'Euclide, on peut exprimer le PGCD comme une combinaison lineaire de 186 et de 72.
D'apres le theoreme de Bezout, il existe donc des entiers u et v tels que :

$$186 \times (-5) + 72 \times (+13) = 6$$

Ainsi, un couple de coefficients de Bezout est :

$$(u, v) = (-5, 13)$$

3) Equation diophantienne.

On considere l'equation :

$$186x + 72y = 6$$

Comme $6 = \gcd(186, 72)$, cette equation admet des solutions entieres. Une solution particuliere est :

$$(x_0, y_0) = (-5, 13)$$

La solution generale est :

$$x = -5 + 12t, \quad y = 13 - 31t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

4) Application du corollaire de Gauss.

$$186 \mid 72n \Longrightarrow 31 \mid n \qquad \text{avec } d = \gcd(186, 72) = 6$$

Par definition de la divisibilite, il existe un entier k tel que :

$$186 \mid 72n \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 72n = 186k$$

On conclut :

$$31 \mid n \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z},\ n = 31m$$

Donc $31 \mid n$.

Corrigé de l'exercice 2

1) Algorithme d'Euclide.

On effectue les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{aligned} 87 &= 1 \times 54 + 33 \\ 54 &= 1 \times 33 + 21 \\ 33 &= 1 \times 21 + 12 \\ 21 &= 1 \times 12 + \ \ 9 \\ 12 &= \ \ 1 \times 9 + \ \ 3 \\ 9 &= \ \ 3 \times 3 + \ \ 0 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\gcd(87, 54) = 3$$

2) Théorème de Bezout.

En remontant les egalites de l'algorithme d'Euclide, on peut exprimer le PGCD comme une combinaison lineaire de 87 et de 54.
D'apres le theoreme de Bezout, il existe donc des entiers u et v tels que :

$$87 \times (+5) + 54 \times (-8) = 3$$

Ainsi, un couple de coefficients de Bezout est :

$$(u, v) = (5, -8)$$

3) Equation diophantienne.

On considere l'equation :

$$87x + 54y = 3$$

Comme $3 = \gcd(87, 54)$, cette equation admet des solutions entieres. Une solution particuliere est :

$$(x_0, y_0) = (5, -8)$$

La solution generale est :

$$x = 5 + 18t, \quad y = -8 - 29t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

4) Application du corollaire de Gauss.

$$87 \mid 54n \Longrightarrow 29 \mid n \qquad \text{avec } d = \gcd(87, 54) = 3$$

Par definition de la divisibilite, il existe un entier k tel que :

$$87 \mid 54n \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 54n = 87k$$

On conclut :

$$29 \mid n \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z},\ n = 29m$$

Donc $29 \mid n$.

Corrigé de l'exercice 3

1) Algorithme d'Euclide.

On effectue les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{aligned} 155 &= 1 \times 90 + 65 \\ 90 &= 1 \times 65 + 25 \\ 65 &= 2 \times 25 + 15 \\ 25 &= 1 \times 15 + 10 \\ 15 &= 1 \times 10 + \ \ 5 \\ 10 &= \ \ 2 \times 5 + \ \ 0 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\gcd(155, 90) = 5$$

2) Théorème de Bezout.

En remontant les egalites de l'algorithme d'Euclide, on peut exprimer le PGCD comme une combinaison lineaire de 155 et de 90.
D'apres le theoreme de Bezout, il existe donc des entiers u et v tels que :

$$155 \times (+7) + 90 \times (-12) = 5$$

Ainsi, un couple de coefficients de Bezout est :

$$(u, v) = (7, -12)$$

3) Equation diophantienne.

On considere l'equation :

$$155x + 90y = 5$$

Comme $5 = \gcd(155, 90)$, cette equation admet des solutions entieres. Une solution particuliere est :

$$(x_0, y_0) = (7, -12)$$

La solution generale est :

$$x = 7 + 18t, \quad y = -12 - 31t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

4) Application du corollaire de Gauss.

$$155 \mid 90n \Longrightarrow 31 \mid n \qquad \text{avec } d = \gcd(155, 90) = 5$$

Par definition de la divisibilite, il existe un entier k tel que :

$$155 \mid 90n \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 90n = 155k$$

On conclut :

$$31 \mid n \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z},\ n = 31m$$

Donc $31 \mid n$.